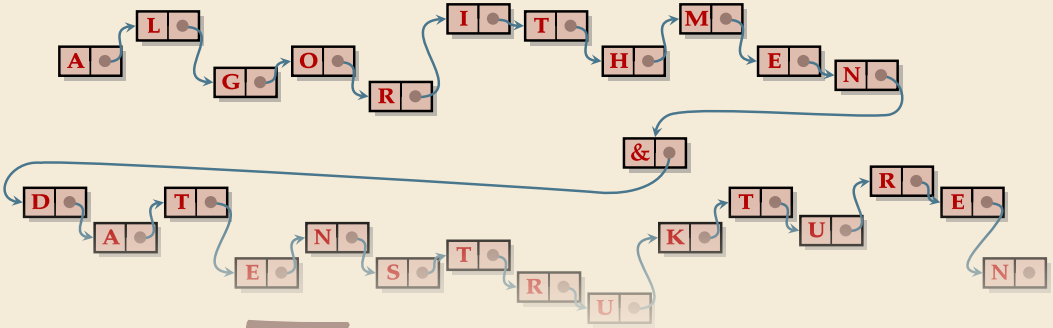


5 Maschinen & Modelle

Algorithmen & Datenstrukturen · Sommersemester 2026

Prof. Dr. Sebastian Wild

CS210 (Sommersemester 2026)
Philipps-Universität Marburg
version `2026-05-11 10:05`

Outline

5 Maschinen & Modelle

5.1 Grundbegriffe

Philosophie

A&DS ist Teil eines **wissenschaftlichen** Studiengangs

Philosophie

A&DS ist Teil eines **wissenschaftlichen** Studiengangs

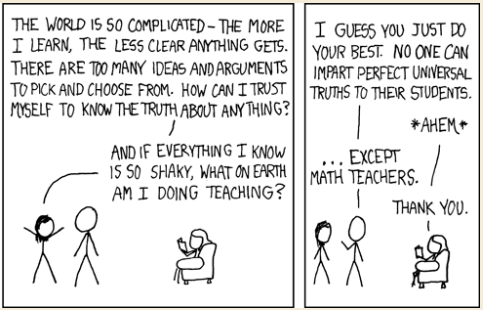
Weniger . . .

Philosophie

A&DS ist Teil eines **wissenschaftlichen** Studiengangs

Weniger . . .

. . . und mehr

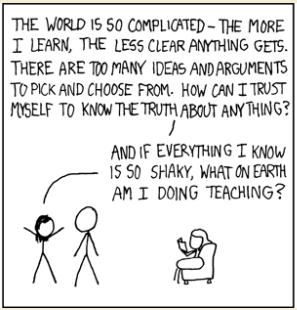


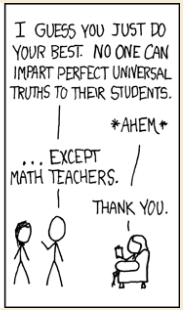
Philosophie

A&DS ist Teil eines **wissenschaftlichen** Studiengangs

Weniger . . .

. . . und mehr





⇝ Fokus auf "universal truths" der Algorithmik

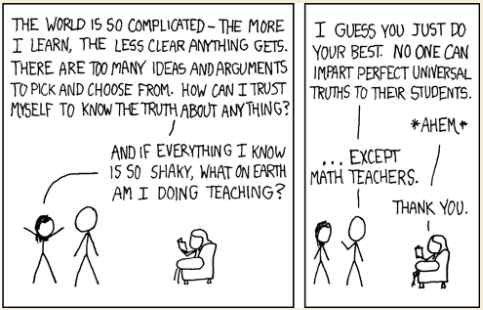
- Model der Realität
- quantitative Vorhersagen
- Validierung der Modelle in Experimenten

Philosophie

A&DS ist Teil eines **wissenschaftlichen** Studiengangs

Weniger . . .

. . . und mehr



- ⇝ Fokus auf "universal truths" der Algorithmik
  - Model der Realität
  - quantitative Vorhersagen
  - Validierung der Modelle in Experimenten

⇝ Müssen Algorithmen *mathematisch* modellieren

Was ist ein Algorithmus?

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen $\approx$ Kochrezept

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen $\approx$ Kochrezept

Genauer:

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen ≈ Kochrezept

Genauer:

1. mechanisch nachvollziehbar
   ⇝ kein „gesunder Menschenverstand“ nötig

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen $\approx$ Kochrezept

Genauer:

1. mechanisch nachvollziehbar
   $\rightsquigarrow$ kein „gesunder Menschenverstand“ nötig
2. endliche Beschreibung

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen $\approx$ Kochrezept

Genauer:

1. mechanisch nachvollziehbar
   $\rightsquigarrow$ kein „gesunder Menschenverstand“ nötig
2. endliche Beschreibung $\neq$ endliche Berechnung!

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen ≈ Kochrezept

Genauer:

1. mechanisch nachvollziehbar
   ⇝ kein „gesunder Menschenverstand“ nötig
2. endliche Beschreibung ≠ endliche Berechnung!
3. löst ein *Problem*,
   d. h. ganze Klasse von Problem*instanzen*

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen ≈ Kochrezept

Genauer:

z. B. Java Programm

1. mechanisch nachvollziehbar
   ⇝ kein „gesunder Menschenverstand“ nötig
2. endliche Beschreibung ≠ endliche Berechnung!
3. löst ein *Problem*,
   d. h. ganze Klasse von Problem*instanzen*

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen ≈ Kochrezept

Genauer:

z. B. Java Programm

1. mechanisch nachvollziehbar
   ⇝ kein „gesunder Menschenverstand“ nötig
2. endliche Beschreibung ≠ endliche Berechnung!
3. löst ein *Problem*, ← $x + y$, nicht nur $17 + 4$
   d. h. ganze Klasse von Problem*instanzen*

Was ist ein Algorithmus?

Anschaulich:
Folge von Anweisungen ≈ Kochrezept

Genauer:

z. B. Java Programm

1. mechanisch nachvollziehbar
   ⇝ kein „gesunder Menschenverstand“ nötig
2. endliche Beschreibung ≠ endliche Berechnung!
3. löst ein *Problem*, ← $x + y$, nicht nur $17 + 4$
   d. h. ganze Klasse von Problem*instanzen*

Typisches Beispiel: *Bubblesort*
nicht ein spezielles Programm,
sondern die zugrundeliegende Idee

Was ist ein Algorithmus?

al-Chwarizmi
Namensgeber für
„Algorithmus“

Anschaulich:
Folge von Anweisungen ≈ Kochrezept

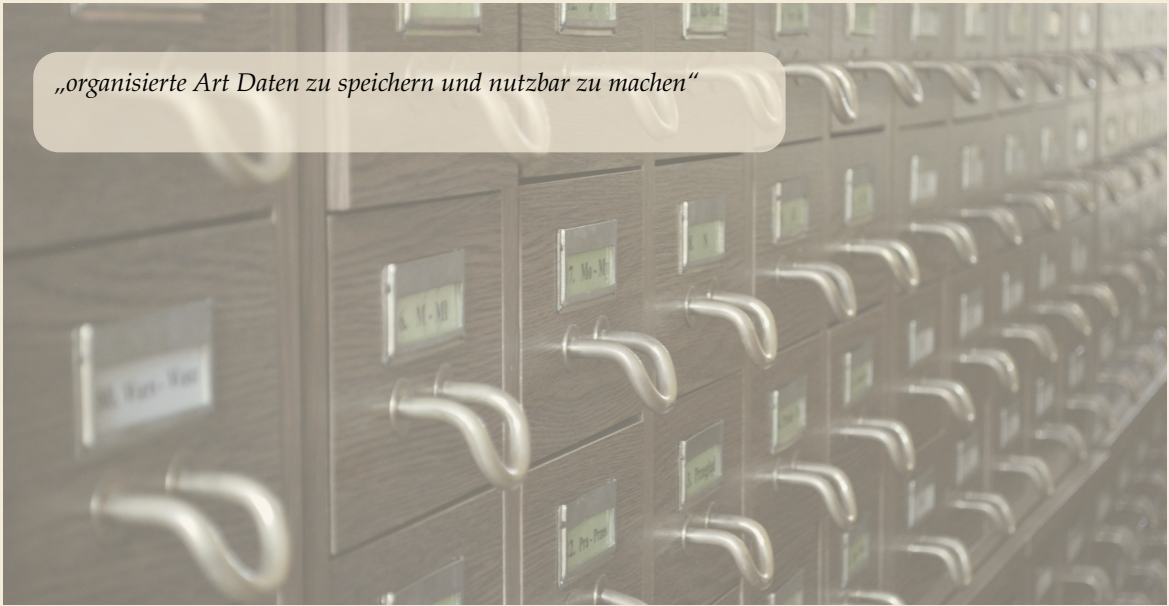
Genauer: (z. B. Java Programm)

1. mechanisch nachvollziehbar
   ⇝ kein „gesunder Menschenverstand“ nötig
2. endliche Beschreibung ≠ endliche Berechnung!
3. löst ein *Problem*, ← $x + y$, nicht nur $17 + 4$
   d. h. ganze Klasse von Problem*instanzen*

Typisches Beispiel: *Bubblesort*
nicht ein spezielles Programm,
sondern die zugrundeliegende Idee

Was ist eine Datenstruktur?

Was ist eine Datenstruktur?



„organisierte Art Daten zu speichern und nutzbar zu machen“

Was ist eine Datenstruktur?

„organisierte Art Daten zu speichern und nutzbar zu machen“

⇝ sehr schwammiger Begriff!

Was ist eine Datenstruktur?

„organisierte Art Daten zu speichern und nutzbar zu machen“

⇝ sehr schwammiger Begriff!

Für uns:

Was ist eine Datenstruktur?

„organisierte Art Daten zu speichern und nutzbar zu machen“

⇝ sehr schwammiger Begriff!

Für uns:

was soll passieren

- **Interface:** Spezifikation von Operationen API
  = *abstract data type* (*ADT*)

application programming interface

Was ist eine Datenstruktur?

„organisierte Art Daten zu speichern und nutzbar zu machen“

⇝ sehr schwammiger Begriff!

Für uns:

was soll passieren

- **Interface:** Spezifikation von Operationen API
  = *abstract data type* (*ADT*)
  application programming interface

  Beispiel: *Union-Find*

Was ist eine Datenstruktur?

„organisierte Art Daten zu speichern und nutzbar zu machen“

⇝ sehr schwammiger Begriff!

Für uns: **was** soll passieren

- **Interface:** Spezifikation von Operationen API
  = *abstract data type* (*ADT*)
  application programming interface

  Beispiel: *Union-Find*

- **Implementierung** eines Interface:
  welche Daten werden gespeichert (oft: Invarianten)
  (pro Operation) *Algorithmus*, der Spezifikation erfüllt

  wie machen wir das

Datenstruktur

Was ist eine Datenstruktur?

„organisierte Art Daten zu speichern und nutzbar zu machen“

⇝ sehr schwammiger Begriff!

Für uns: **was** soll passieren

- **Interface:** Spezifikation von Operationen API
  = *abstract data type* (*ADT*)
  application programming interface

  Beispiel: *Union-Find*

- **Implementierung** eines Interface:

  welche Daten werden gespeichert (oft: Invarianten)
  (pro Operation) *Algorithmus*, der Spezifikation erfüllt

  Beispiel: *QuickUnion* **wie** machen wir das

Algorithmen für die Ewigkeit

Gute algorithmische Ideen sind zeitlos!

- **Euklidscher Algorithmus** für ggT
  - von ≈ 300 v. Chr.
  - i.W. unverändert in Verwendung

```
1 static int gcd(int p, int q) {
2     if (q == 0) return p;
3     else return gcd(q, p % q);
4 }
```

Algorithmen für die Ewigkeit

Gute algorithmische Ideen sind zeitlos!

- **Euklidscher Algorithmus** für ggT
  - von $\approx$ 300 v. Chr.
  - i.W. unverändert in Verwendung

```
1 static int gcd(int p, int q) {
2     if (q == 0) return p;
3     else return gcd(q, p % q);
4 }
```

- **Mergesort** (siehe Unit 7)
  - 1945 beschrieben
  - Programmiersprachen und Computer von damals und heute haben wenig gemeinsam
  - trotzdem ist Mergesort einer der besten Sortieralgorithmen, damals wie heute

Algorithmen für die Ewigkeit

Gute algorithmische Ideen sind zeitlos!

- **Euklidscher Algorithmus** für ggT
  - von $\approx$ 300 v. Chr.
  - i.W. unverändert in Verwendung

```
1 static int gcd(int p, int q) {
2     if (q == 0) return p;
3     else return gcd(q, p % q);
4 }
```

- **Mergesort** (siehe Unit 7)
  - 1945 beschrieben
  - Programmiersprachen und Computer von damals und heute haben wenig gemeinsam
  - trotzdem ist Mergesort einer der besten Sortieralgorithmen, damals wie heute

$\rightsquigarrow$ *Wie sollen wir „Algorithmen für die Ewigkeit“ formulieren?*

- sicher nicht in einer proprietären Sprache, die nur für eine aktuelle Maschinengeneration funktioniert . . .

Java? Ja, aber . . .

Warum nicht einfach: Algorithmus = Java-Programm?

- („Java ist doof, ich mag lieber C/C++/Python/Rust/OCAML/Groovy/Fortran/Haskell/Cobol/. . . “)

Java? Ja, aber . . .

Warum nicht einfach: Algorithmus = Java-Programm?

- („Java ist doof, ich mag lieber C/C++/Python/Rust/OCAML/Groovy/Fortran/Haskell/Cobol/. . . “)
- um Algorithmen zu beschreiben wollen wir manchmal Details offen lassen
  - das geht in einem ausführbaren Java-Programm nicht!
  - aber grundsätzlich möglich, z. B. durch eine Interface-Methode, die wir nur aufrufen

Java? Ja, aber . . .

Warum nicht einfach: Algorithmus = Java-Programm?

- („Java ist doof, ich mag lieber C/C++/Python/Rust/OCAML/Groovy/Fortran/Haskell/Cobol/. . . “)
- um Algorithmen zu beschreiben wollen wir manchmal Details offen lassen
  - das geht in einem ausführbaren Java-Programm nicht!
  - aber grundsätzlich möglich, z. B. durch eine Interface-Methode, die wir nur aufrufen
- konkrete Programmiersprachen spiegeln Restriktionen **aktueller** Hardware und Performance-Tradeoffs wider
  - z. B. maximale Arraygröße in Java: $2^{31} - 1$ $\rightsquigarrow$ auch maximale String-Länge
  - maximale Code-Größe einer Methode: 64 KB (kompilierter Bytecode)

Java? Ja, aber . . .

Warum nicht einfach: Algorithmus = Java-Programm?

- („Java ist doof, ich mag lieber C/C++/Python/Rust/OCAML/Groovy/Fortran/Haskell/Cobol/. . . “)
- um Algorithmen zu beschreiben wollen wir manchmal Details offen lassen
  - das geht in einem ausführbaren Java-Programm nicht!
  - aber grundsätzlich möglich, z. B. durch eine Interface-Methode, die wir nur aufrufen
- konkrete Programmiersprachen spiegeln Restriktionen **aktueller** Hardware und Performance-Tradeoffs wider
  - z. B. maximale Arraygröße in Java: $2^{31} - 1$ $\rightsquigarrow$ auch maximale String-Länge
  - maximale Code-Größe einer Methode: 64 KB (kompilierter Bytecode)
- Werden oft ***Java-Implementierung*** unserer abstrakten algorithmischen Idee angeben
  - Java-Code als eindeutige **Beschreibung** der Idee
  - Algorithmus bleibt aber die **Idee**, nicht der (potentiell Java-spezifisch beschränkte) Code

5.2 Datenmodelle

Ein Wettrennen

Ein Wettrennen

Mensch (zu Fuß) oder Zug: Wer ist schneller?

(beide stehen zu Beginn)

- Kommt darauf an! Am Anfang sicher der Mensch . . .

Ein Wettrennen

Mensch (zu Fuß) oder Zug: Wer ist schneller *am Horizont*?

(beide stehen zu Beginn)

- Kommt darauf an! Am Anfang sicher der Mensch . . .
- aber auf lange Sicht der Zug

Eingabegröße

„Zug vs. zu Fuß“ nur sinnvoll zu beantworten, wenn Gesamtstrecke bekannt ist

Analog: Zwei Algorithmen auf unterschiedlichen Eingabe vergleichen potentiell unfair

- falls A dann schneller ist als B, ist A wirklich besser, oder war As Eingabe einfacher?

Eingabegröße

„Zug vs. zu Fuß“ nur sinnvoll zu beantworten, wenn Gesamtstrecke bekannt ist

Analog: Zwei Algorithmen auf unterschiedlichen Eingabe vergleichen potentiell unfair

- falls A dann schneller ist als B, ist A wirklich besser, oder war As Eingabe einfacher?

*Für jedes algorithmische Problem legen wir **Parameter** der Eingabe fest die grob einfangen, wie schwierig/aufwändig diese Eingabe ist.*

- einfachste Variante: **Eingabegröße** n
  - Was n genau ist, hängt vom Problem ab
  - Teil der Problembeschreibung

Eingabegröße

„Zug vs. zu Fuß“ nur sinnvoll zu beantworten, wenn Gesamtstrecke bekannt ist

Analog: Zwei Algorithmen auf unterschiedlichen Eingabe vergleichen potentiell unfair

- falls A dann schneller ist als B, ist A wirklich besser, oder war As Eingabe einfacher?

*Für jedes algorithmische Problem legen wir **Parameter** der Eingabe fest die grob einfangen, wie schwierig/aufwändig diese Eingabe ist.*

- einfachste Variante: **Eingabegröße n**
  - Was n genau ist, hängt vom Problem ab
  - Teil der Problembeschreibung
- **Beispiele:**
  - 3SUM: n = Anzahl Zahlen in der Eingabe
  - Union-Find: N = Anzahl Objekte, M = Anzahl von `union` und `find` Aufrufen

Eingabegröße

„Zug vs. zu Fuß“ nur sinnvoll zu beantworten, wenn Gesamtstrecke bekannt ist

Analog: Zwei Algorithmen auf unterschiedlichen Eingabe vergleichen potentiell unfair

- falls A dann schneller ist als B, ist A wirklich besser, oder war As Eingabe einfacher?

*Für jedes algorithmische Problem legen wir **Parameter** der Eingabe fest die grob einfangen, wie schwierig/aufwändig diese Eingabe ist.*

- einfachste Variante: **Eingabegröße n**
  - Was n genau ist, hängt vom Problem ab
  - Teil der Problembeschreibung
- **Beispiele:**
  - 3SUM: n = Anzahl Zahlen in der Eingabe
  - Union-Find: N = Anzahl Objekte, M = Anzahl von `union` und `find` Aufrufen

$\rightsquigarrow$ **Kosten** eines Algorithmus A sind eine **Funktion in n**

- **Beispiel**: Brute-force 3SUM Algorithmus hat Laufzeit $T(n) = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$

Datenmodelle

Für viele Algorithmen ist selbst bei festem n die Laufzeit datenabhängig.

Datenmodelle

Für viele Algorithmen ist selbst bei festem n die Laufzeit datenabhängig. In der Algorithmik verwendet man deshalb einfache *Datenmodelle* (Annahmen an Daten):

- **Worst-Case-Performance:**
  Betrachte stets die für diesen Algorithmus *schlimmste* Eingabe der Größe n

Datenmodelle

Für viele Algorithmen ist selbst bei festem n die Laufzeit datenabhängig. In der Algorithmik verwendet man deshalb einfache *Datenmodelle* (Annahmen an Daten):

- **Worst-Case-Performance:**
  Betrachte stets die für diesen Algorithmus *schlimmste* Eingabe der Größe n
- **Best-Case-Performance:**
  Betrachte stets die für diesen Algorithmus *günstigste* Eingabe der Größe n
- **Average-Case-Performance:**
  Bestimme den Durchschnitt/Erwartungswert für eine *zufällige* Eingabe der Größe n

Datenmodelle

Für viele Algorithmen ist selbst bei festem n die Laufzeit datenabhängig. In der Algorithmik verwendet man deshalb einfache *Datenmodelle* (Annahmen an Daten):

- **Worst-Case-Performance:**
  Betrachte stets die für diesen Algorithmus *schlimmste* Eingabe der Größe n
- **Best-Case-Performance:**
  Betrachte stets die für diesen Algorithmus *günstigste* Eingabe der Größe n
- **Average-Case-Performance:**
  Bestimme den Durchschnitt/Erwartungswert für eine *zufällige* Eingabe der Größe n

$\rightsquigarrow$ Kosten wieder nur eine Funktion in n

5.3 Asymptotische Vergleiche

Jeder Vergleich braucht einen Referenzpunkt

Jeder Vergleich braucht einen Referenzpunkt

Jeder Vergleich braucht einen Referenzpunkt

Warum Asymptotik?

„Aber meine Eingabe ist doch nicht unendlich!“

Warum Asymptotik?

„Aber meine Eingabe ist doch nicht unendlich!“

- Stimmt.

Warum Asymptotik?

„Aber meine Eingabe ist doch nicht unendlich!“

- Stimmt.
- Aber: Verhalten für $n \to \infty$ ist (meistens) gute Approximation für moderate n

$\rightsquigarrow$ Asymptotisch schnellerer Algorithmus (= bessere Skalierbarkeit!)
(meist) auch in der Praxis schneller

Warum Asymptotik?

„Aber meine Eingabe ist doch nicht unendlich!“

- Stimmt.
- Aber: Verhalten für $n \to \infty$ ist (meistens) gute Approximation für moderate n

$\rightsquigarrow$ Asymptotisch schnellerer Algorithmus (= bessere Skalierbarkeit!)
(meist) auch in der Praxis schneller

Standard-Vorgehen in der Algorithmik: Vergleiche Θ-Klasse der Worst-Case-Laufzeit

Warum Asymptotik?

„Aber meine Eingabe ist doch nicht unendlich!“

- Stimmt.
- Aber: Verhalten für $n \to \infty$ ist (meistens) gute Approximation für moderate n

$\rightsquigarrow$ Asymptotisch schnellerer Algorithmus (= bessere Skalierbarkeit!)
(meist) auch in der Praxis schneller

Standard-Vorgehen in der Algorithmik: Vergleiche Θ-Klasse der Worst-Case-Laufzeit

Für präzisere Vergleiche: $\sim$ Asymptotik

Schummelnde Algorithmen

Außerdem: Algorithmen-Design für *feste* Eingabegröße theoretisch langweilig:

- Für festes n gibt es nur **endlich viele verschiedene** Eingaben

$\rightsquigarrow$ Trivialer Algorithmus: alle **vorab berechnen** und passende Lösung ausgeben!

Schummelnde Algorithmen

Außerdem: Algorithmen-Design für *feste* Eingabegröße theoretisch langweilig:

- Für festes n gibt es nur **endlich viele verschiedene** Eingaben

⇝ Trivialer Algorithmus: alle **vorab berechnen** und passende Lösung ausgeben!

- meist nicht praktikabel (riesiges Programm mit allen Fällen hard-coded)
- aber nach Algorithmen-Definition nicht verboten 😈

Schummelnde Algorithmen

Außerdem: Algorithmen-Design für *feste* Eingabegröße theoretisch langweilig:

- Für festes n gibt es nur **endlich viele verschiedene** Eingaben

⇝ Trivialer Algorithmus: alle **vorab berechnen** und passende Lösung ausgeben!

- meist nicht praktikabel (riesiges Programm mit allen Fällen hard-coded)
- aber nach Algorithmen-Definition nicht verboten 😈

große Errungenschaft der Informatik!

↯ verhindert jegliche **Unmöglichkeits-Ergebnisse** (*"lower bounds"*)
(= Beweise, dass algorithmisches Problem nicht schneller als mit gewisser Laufzeit lösbar ist)

Schummelnde Algorithmen

Außerdem: Algorithmen-Design für *feste* Eingabegröße theoretisch langweilig:

- Für festes n gibt es nur **endlich viele verschiedene** Eingaben

⇝ Trivialer Algorithmus: alle **vorab berechnen** und passende Lösung ausgeben!

- meist nicht praktikabel (riesiges Programm mit allen Fällen hard-coded)
- aber nach Algorithmen-Definition nicht verboten 😈

große Errungenschaft der Informatik!

↯ verhindert jegliche **Unmöglichkeits-Ergebnisse** (*"lower bounds"*)
(= Beweise, dass algorithmisches Problem nicht schneller als mit gewisser Laufzeit lösbar ist)

⇝ *Brauchen Asymptotik um Suche nach **optimalen Algorithmen** sinnvoll zu definieren*

5.4 Mathematische Maschinenmodelle

Clicker Question

Was sind die Kosten für die *Addition* zweier d-stelliger, ganzer Zahlen?
(Zum Beispiel, für $d = 5$, berechne $45\,235 + 91\,342$)

- **A** $O(1)$
- **B** $O(\log d)$
- **C** $O(d)$
- **D** $O(d^2)$
- **E** keine Ahnung

→ *sli.do/cs210*

Clicker Question

Was sind die Kosten für die *Addition* zweier d-stelliger, ganzer Zahlen?
(Zum Beispiel, für $d = 5$, berechne $45\,235 + 91\,342$)

- **A** $O(1)$ ✓ — 2 ints in Java
- **B** ~~$O(\log d)$~~
- **C** $O(d)$ ✓ — Big Integer
- **D** ~~$O(d^2)$~~
- **E** keine Ahnung ✓

→ sli.do/cs210

Was ist schon ein int?

als Funktion in n

Beispiel: Wie viel Speicher brauchen n natürliche Zahlen?

Was ist schon ein int?

als Funktion in n

Beispiel: Wie viel Speicher brauchen n natürliche Zahlen?

- **Java:** $32n$ bit, da `int` eine 32 Bit Zahl ist.
  = typische *Wortgröße* aktueller Hardware ← damit kann in einem Schritt gerechnet werden

Was ist schon ein int?

als Funktion in n

Beispiel: Wie viel Speicher brauchen n natürliche Zahlen?

- **Java:** $32n$ bit, da `int` eine 32 Bit Zahl ist.
  = typische *Wortgröße* aktueller Hardware ← damit kann in einem Schritt gerechnet werden
- **Theorie:** Zahl im Bereich $0..M$ braucht $\lceil \mathrm{ld}(M+1) \rceil$ bits
  also $n \cdot \lceil \mathrm{ld}(M+1) \rceil$ bits

Was ist schon ein int?

als Funktion in n

Beispiel: Wie viel Speicher brauchen n natürliche Zahlen?

- **Java:** $32n$ bit, da `int` eine 32 Bit Zahl ist.
  = typische *Wortgröße* aktueller Hardware ← damit kann in einem Schritt gerechnet werden
- **Theorie:** Zahl im Bereich $0..M$ braucht $\lceil \mathrm{ld}(M+1) \rceil$ bits
  also $n \cdot \lceil \mathrm{ld}(M+1) \rceil$ bits
- Wenn M klein ist, würden wir aus Effizienzgründen trotzdem 32-bit `int`s wählen.

Was ist schon ein int?

Beispiel: Wie viel Speicher brauchen n natürliche Zahlen?

als Funktion in n

- **Java:** $32n$ bit, da `int` eine 32 Bit Zahl ist.
  = typische *Wortgröße* aktueller Hardware ← damit kann in einem Schritt gerechnet werden
- **Theorie:** Zahl im Bereich $0..M$ braucht $\lceil \mathrm{ld}(M+1) \rceil$ bits
  also $n \cdot \lceil \mathrm{ld}(M+1) \rceil$ bits
- Wenn M klein ist, würden wir aus Effizienzgründen trotzdem 32-bit `int`s wählen.

$\rightsquigarrow$ hängt von der Größe der Zahlen ab!

Wortbreite

Wir denken ja aber asymptotisch . . . was ist denn bitte „$\lim_{n \to \infty}$ `int`*“? Immer noch 32 Bit?*

Wortbreite

Wir denken ja aber asymptotisch . . . was ist denn bitte „$\lim_{n\to\infty}$ `int`“? Immer noch 32 Bit?

- Allgemeine Version: Halten *Wortbreite* w **variabel** (ein Parameter der Maschine)

$\rightsquigarrow$ Mit w**-Bit Zahlen** können wir wie mit `int` rechnen (Addition in $O(1)$)

- Für größere Zahlen müssen wir Algorithmen wie das schriftliche Addieren bemühen

Wortbreite

Wir denken ja aber asymptotisch . . . was ist denn bitte „$\lim_{n\to\infty}$ `int`“? Immer noch 32 Bit?

- Allgemeine Version: Halten *Wortbreite* w **variabel** (ein Parameter der Maschine)

$\rightsquigarrow$ Mit w**-Bit Zahlen** können wir wie mit `int` rechnen (Addition in $O(1)$)

- Für größere Zahlen müssen wir Algorithmen wie das schriftliche Addieren bemühen

Aber: Da `int` auch Indizes und Länge von Arrays (allgemein: Speicheradressen) beschreibt, können wir nur Eingaben bis Größe $n \leq 2^w$ verarbeiten!

- Einziger Ausweg: Wortbreite w muss mit n wachsen(!)
- übliche Annahme: $\boxed{w = \Theta(\log n)}$

Wortbreite

Wir denken ja aber asymptotisch . . . was ist denn bitte „$\lim_{n\to\infty}$ `int`“? Immer noch 32 Bit?

- Allgemeine Version: Halten *Wortbreite* w **variabel** (ein Parameter der Maschine)

⇝ Mit w**-Bit Zahlen** können wir wie mit `int` rechnen (Addition in $O(1)$)

- Für größere Zahlen müssen wir Algorithmen wie das schriftliche Addieren bemühen

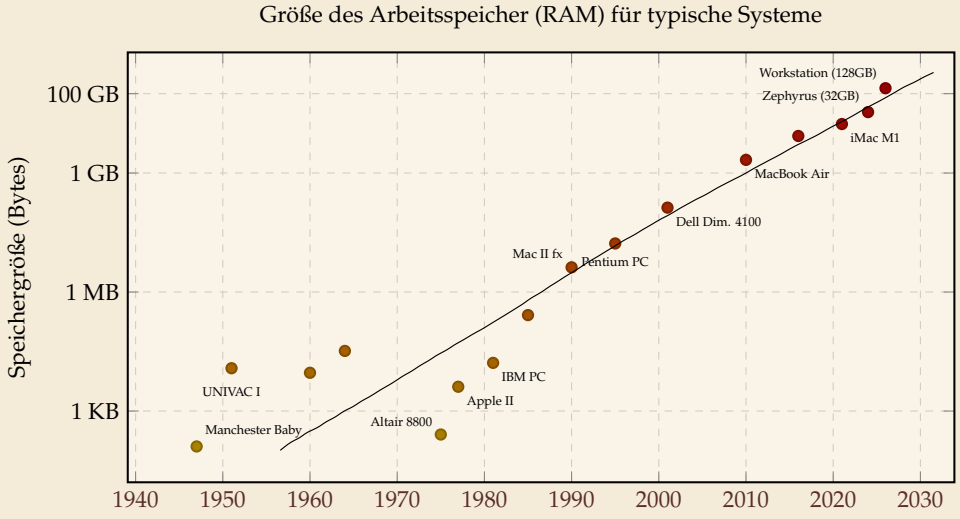
Aber: Da `int` auch Indizes und Länge von Arrays (allgemein: Speicheradressen) beschreibt, können wir nur Eingaben bis Größe $n \leq 2^w$ verarbeiten!

- Einziger Ausweg: Wortbreite w muss mit n wachsen(!)
- übliche Annahme: $\boxed{w = \Theta(\log n)}$

⇝ *Das heißt, unsere Maschine wächst mit den Eingaben mit!?* 🤯
Wie ergibt das Sinn?

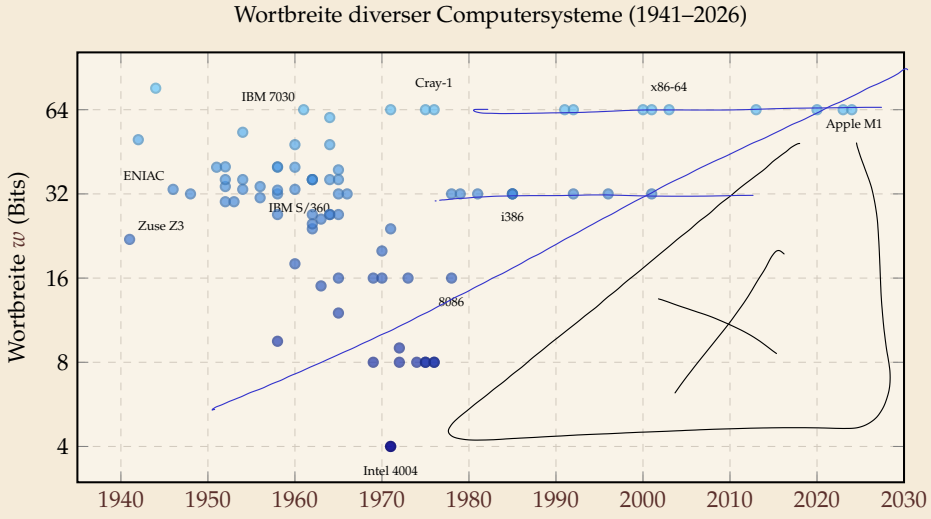
Arbeitsspeichergröße über die Zeit

Arbeitsspeicher ist gute Näherung für größte Eingabegrößen



Wortbreite über die Zeit

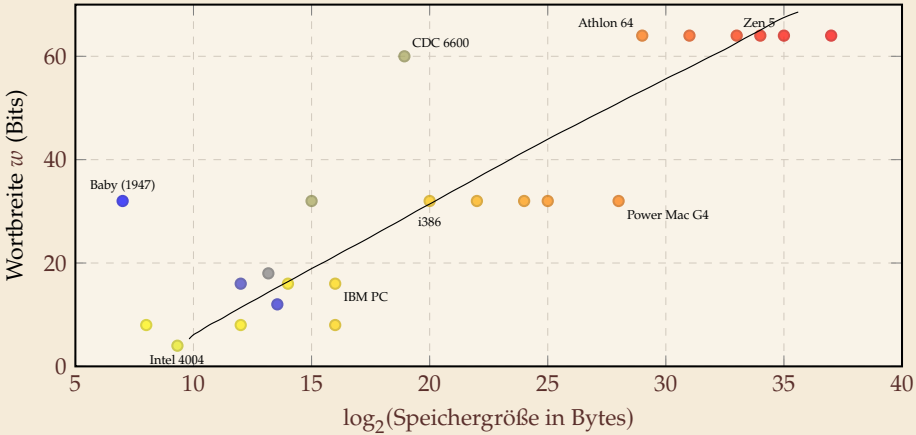
Entwicklung der Wortbreite w in der gleichen Zeit (https://en.wikipedia.org/wiki/Word_(computer_architecture))



$w = \Theta(\log n)$!

Das Verhältnis von $\log_2 n$ und w ist recht stabil $\rightsquigarrow$ *$w = \Theta(\log n)$ ist plausibel!*

Wortbreite vs. Speichergröße diverser Systeme (1947–2026)



Farbe = Erscheinungsjahr (von blau zu rot)

Word-RAM

Falls es auf solche Details ankommt, ist $w = \Theta(\log n)$ die „richtige“ Annahme

- ⇝ mit „kleinen“ (polynomiell beschränkten) ganzen Zahlen können wir in Konstantzeit rechnen
- ⇝ mit „großen“ ganzen Zahlen ist die Laufzeit von der Anzahl Ziffern abhängig

Word-RAM

Falls es auf solche Details ankommt, ist $w = \Theta(\log n)$ die „richtige“ Annahme

- ⇝ mit „kleinen“ (polynomiell beschränkten) ganzen Zahlen können wir in Konstantzeit rechnen
- ⇝ mit „großen“ ganzen Zahlen ist die Laufzeit von der Anzahl Ziffern abhängig

- kann zu einem vollständigen, mathematischen Modell eines einfachen, abstrakten Computers ergänzt werden
  - ähnlich zu modernen RISC-Prozessoren, aber Wortbreite w und unbegrenzter Speicher
  - erlaubt neben arithmetischen Operationen auch Bit-weise Operationen

- ⇝ Standard-Annahme in der Algorithmik-Forschung:
  das ***Word-RAM*** **Modell** (RAM = random access machine, nicht Arbeitsspeicher)

5.5 Kostenmodelle

Was kostet ein Algorithmus?

Typischerweise interessiert uns für einen Algorithmus

- die **Laufzeit** (auf einem Computer und mit einer Eingabe bzw. Worst-Case-Eingabe der Größe n)
- der **Speicherbedarf** (zusätzlich zur Eingabe)

Was kostet ein Algorithmus?

Typischerweise interessiert uns für einen Algorithmus

bzw. Worst-Case-Eingabe der Größe n

- die **Laufzeit** (auf einem Computer und mit einer Eingabe)
- der **Speicherbedarf** (zusätzlich zur Eingabe)

Präzise Laufzeit für **mathematische Analyse** und Verständnis ungeeignet

- hängt von vielen Details der Hardware und Implementierung ab
- nicht perfekt reproduzierbar
- sehr mühselig bis unmöglich genau zu analysieren

Abstrakte Kostenmaße

- ⇝ Suchen stattdessen ein **abstraktes Kostenmaß** für einen Algorithmus
  - (nahezu) proportional zur tatsächlichen Laufzeit ⇝ erlaubt Prognosen!
  - **zählt** Vorkommen von diskreten Events (z. B. Anzahl Ausführungen einer Code-Zeile)
- ⇝ exakt reproduzierbar, hardwareunabhängig
  - (hoffentlich) leicht(er) zu analysieren

Abstrakte Kostenmaße

- ⇝ Suchen stattdessen ein **abstraktes Kostenmaß** für einen Algorithmus
  - (nahezu) proportional zur tatsächlichen Laufzeit ⇝ erlaubt Prognosen!
  - **zählt** Vorkommen von diskreten Events (z. B. Anzahl Ausführungen einer Code-Zeile)
- ⇝ exakt reproduzierbar, hardwareunabhängig
  - (hoffentlich) leicht(er) zu analysieren

Beispiel: Union-Find

- Kostenmaß: Arrayzugriffe (insbesondere auf `id[]`)

Zusammenfassung

Durch die Formulierung konkreter Modelle wird die Analyse von Algorithmen auf ein solides Fundament gestellt

- Datenmodelle für die Eingaben
- Maschinenmodelle für die erlaubten Algorithmen
- Kostenmodelle für das Maß, das wir optimieren möchten

⇝ Voraussetzung für **wissenschaftlichen Vergleich von Algorithmen** (*algorithm science*)