Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Algorithmik

Wintersemester 2024/2025

Version 2024-11-04 18:34

Prof. Dr. Sebastian Wild
Dr. Nikolaus Glombiewski

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen

Abgabe: 08.11.2024,
bis **spätestens** 19:00 Uhr
über die ILIAS Plattform

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1: Amortisierte Analyse (3 Punkte)

Wir betrachten einen Stack S der die folgenden Operationen unterstützt:

1. `Push`(S, x): Legt das Element x auf den Stack S.
2. `Pop`(S): Entfernt das oberste Element vom Stack S.
3. `MultiPop`(S, k): Entfernt die obersten k Elemente vom Stack S.

`Push` und `Pop` haben eine Laufzeit von $O(1)$, d.h. eine Sequenz von n `Push`- oder `Pop`-Operationen hat eine Laufzeit von $\Theta(n)$. `MultiPop` entfernt die (maximal) obersten k Elemente des Stacks S der größe s in einer Folge von `Pop`-Operationen und hat entsprechend die Kosten $\min(s, k)$.

Wir wollen nun eine Sequenz von `Push`-, `Pop`- und `MultiPop`-Operationen auf einen initial leeren Stack betrachten. Da der Stack höchstens die Höhe n hat, hat `MultiPop` im Worst-Case die Laufzeit $O(n)$. Entsprechend hat eine Folge von n dieser drei Operationen höchstens die Laufzeit $O(n^2)$. Diese obere Schranke ist allerdings nicht sehr nah an den tatsächlichen Kosten.

Bestimmen Sie die amortisierten Kosten mit der Potentialmethode: Bestimmen Sie eine geeignetes Potential Φ, welches den Stack D_i, der nach Anwendung er i-ten Stack-Operation entsteht, die nicht-negative Zahl $\Phi(D_i)$ zuordnet. Berechnen Sie damit die amortisierten Kosten der drei Stack-Operationen und folgern Sie eine niedrigere obere Schranke für die Kosten von n Operationen als die ursprünglichen $O(n^2)$.

Aufgabe 2.2: Binäre Bäume (2+2+2) (6 Punkte)

a) Gegeben sei die Menge von Schlüsseln $\{2, 5, 6, 11, 17, 18, 22\}$. Zeichnen Sie binäre Suchbäume mit den Höhen 2,3,5 und 6.

b) Bei einem *erweiterten Binärbaum* ist die Anzahl von Kindern entweder 0 oder 2, d.h. es darf keine unären Knoten geben. Zeigen Sie durch strukturelle Induktion: Die Anzahl Knoten (Blättere und innere Knoten) in einem erweiterten Binärbaum ist ungerade.

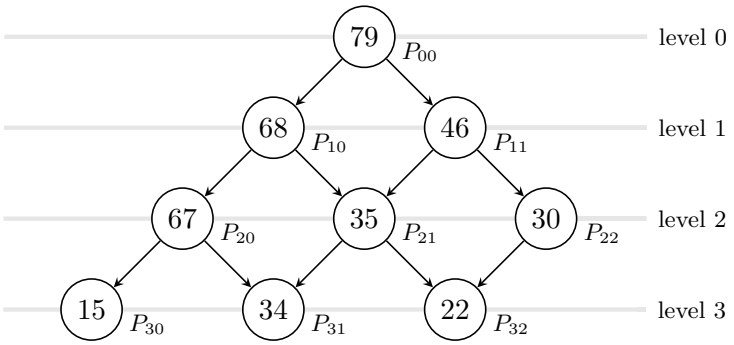
c) Gegeben sei folgender Sortieralgorithmus: Für eine Menge von n Zahlen wird ein (unbalancierter) binärer Suchbaum aufgebaut, indem n Mal die Einfüge-Operation ausgeführt wird. Anschließend wird eine *in-order* Traversierung des Baums durchgeführt. Geben Sie die Best- und Worst-Case Laufzeiten des Sortieralgorithmus an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.3: Entwurf von Datenstrukturen (3 Punkte)

Entwerfen Sie eine Datenstruktur, welche die folgenden Operationen in konstanter Zeit und mit konstantem Speicherbedarf pro Element unterstützt: *push*, *pop*, *getMin*. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.4: Priority Queues (1+2+2+3) (8 Punkte)

Eine *Pyramide* ist eine Datenstruktur, welche die Basis für eine Implementierung des abstrakten Datentyps Priority Queue bildet. Im Folgenden ist ein Beispiel für eine Pyramide mit 9 Knoten:



Eine Pyramide hat die folgenden beiden Eigenschaften:

- **Struktur:** Eine Pyramide besteht aus $\ell \geq 0$ Leveln. Das i-te Level, für $0 \leq i < \ell$, enthält höchstens $i + 1$ Einträge, welche als $P_{i,0}, \ldots, P_{i,i}$ bezeichnet werden.

  Bis auf potentiell das letzte Level ist jedes Level vollständig gefüllt. Das letzte Level ist links-bündig, d.h. Knoten sind von links nach rechts befüllt.

- **Ordnung:** Jeder Knoten $P_{i,j}$ hat höchstens zwei *Kinder:* $P_{i+1,j}$ und $P_{i+1,j+1}$, falls diese Knoten existieren. Die Priorität eines Knoten ist immer größer oder gleich der Priorität seiner beiden Kinder.

Sie dürfen annehmen, dass alle Elemente einer Pyramide paarweise verschieden sind.

a) Zeigen Sie, dass eine Pyramide mit n Kindern die Höhe $\Theta(\sqrt{n})$ hat.

b) Angenommen sie können auf die Elemente *key*, *leftChild*, *rightChild*, *leftParent*, and *rightParent* eines Knotens in $O(1)$ Laufzeit zugreifen.

   Geben Sie eine Implementierung in Pseudocode für die *deleteMax* Operation in Pyramiden an. Die Laufzeit Ihres Algorithmus muss linear in der Höhe der Pyramide sein.

   Hinweis: Orientieren Sie sich an der deleteMax Operation von Heaps.

c) Geben Sie eine Implementierung in Pseudocode für die *insert* Operation in Pyramiden an. Die Laufzeit Ihres Algorithmus muss linear in der Höhe der Pyramide sein.

d) Die Operation *contains*(x) nimmt eine Priorität x entgegen, und gibt zurück, ob eine Priority Queue einen Schlüssel mit der Priorität x enthält.

   In einem binären Heap muss im Worst Case der gesamte Heap durchsucht werden. In Pyramidem lässt sich die *contains* Operation effizienter implementieren.

Beschreiben Sie eine Implementierung für *contains* in Pyramidem mit einer Laufzeit von $O(\sqrt{n}\log n)$. Für Ihre Implementierung dürfen Sie annehmen, dass es eine Funktion $\texttt{get}(i,j) = P_{i,j}$ gibt, welche einen Knoten mit den gegebenen Koordinaten in $O(1)$ Laufzeit zurückgibt.