Marburg University

Department of Computer Science
Prof. Dr. Sebastian Wild

Date: 2025-01-16
Version: 2026-01-16 17:51

Übungsblatt 11 zur Vorlesung Effiziente Algorithmen (Winter 2025/26)

Abgabe: *Bis 2026-01-23 18:00, on ILIAS.*

1. Aufgabe

20 + 10 + 30 Punkte

Gegeben sei ein Array $B[0 \ldots n)$ mit n booleschen Werten (n Bits). Im Folgenden soll ein *logisches Und* ($\wedge$) auf dem Array berechnet werden. Das Resultat ist genau dann *Wahr*, wenn alle n Einträge im Array *Wahr* sind. (Wir nehmen dabei an, dass jedes Bit als ganzes Wort gespeichert wird.)

a) Entwerfen Sie einen CREW-PRAM Algorithmus, welcher das *logische Und* von $B[0 \ldots n)$ berechnet. Der Algorithmus soll eine Zeit (span) von $\mathcal{O}(\log n)$ und eine Arbeit (work) von $\mathcal{O}(n \log n)$ besitzen.

b) Können Sie den Algorithmus arbeits-effizient (work-efficient) gestalten?

c) Betrachten Sie nun das CR**C**W-PRAM Modell. Sie dürfen eine Konflikt-Strategie wählen, welche Sie für angemessen halten. Entwerfen Sie einen parallelen Algorithmus, welcher das *logische Und* in *konstanter* Zeit berechnet.

2. Aufgabe

30 + 30 Punkte

Beim Rucksackproblem ist eine Menge von n Objekten und eine Gewichtsschranke W gegeben. Dabei hat jedes Objekt i einen Nutzen v_i und ein Gewicht w_i. Das Problem besteht nun darin, eine Teilmenge S der n Objekte derart auszuwählen, dass der Gesamtnutzen $\sum_{i \in S} v_i$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ maximiert wird. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass alle Nutzen- und Gewichtswerte nichtnegative reelle Zahlen sind.
Das Bruchteil-Rucksack Problem ist eine Variante, bei der jedes Objekt i zu einem beliebigen Bruchteil $0 < b \leq 1$, also mit Gewicht $b \cdot w_i$ und Nutzen $b \cdot v_i$, in den Rucksack gepackt werden kann.

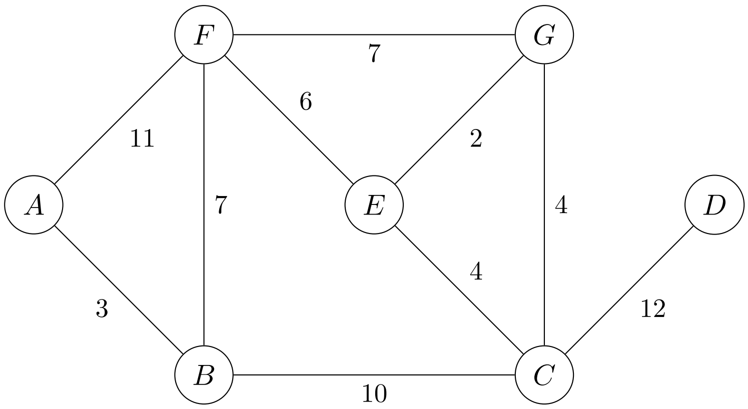
a) Entwerfen Sie einen Greedy-Algorithmus zur Berechnung einer Lösung für die einfache (0/1) Variante sowie für die Bruchteil-Variante des Rucksackproblems. Die Lösung für die Bruchteil-Variante soll optimal sein.

b) Zeigen Sie, dass die Greedy-Methode für den 0/1-Rucksack beliebig schlecht werden kann. Argumentieren Sie, warum die Lösung für das Bruchteil-Rucksack eine optimale Lösung garantiert.

3. Aufgabe

20 + 20 Punkte

a) Berechnen Sie für folgenden Graphen einen minimalen Spannbaum mit dem Algorithmus von Kruskal. Geben Sie ferner alle weiteren möglichen minimalen Spannbäume an.



b) Zeigen Sie: Für einen Graphen G und einen minimalen Spannbaum T, kann die Eingabe für den Algorithmus von Kruskal so angepasst werden, dass der Algorithmus von Kruskal T als Ergebnis liefert.

4. Aufgabe

40 Punkte

Professor Verzweig hat einen neuen Divide-and-Conquer Algorithmus zur Berechnung von minimal spannenden Bäumen entworfen.

Für einen Graph $G = (V, E)$ wird die Menge an Knoten V in zwei Mengen V_1 und V_2 aufgeteilt, sodass $||V_1| - |V_2|| \leq 1$. Sei E_1 die Menge an Kanten, die nur in V_1 inzident sind und E_2 die Menge an Kanten, die nur in V_2 inzident sind. Das Problem wird rekursiv auf den beiden Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ gelöst. Anschließend wählt man die Kante in E mit minimalen Gewicht, welche den Schnitt (V_1, V_2) kreuzt, um die beiden minimalen Spannbäume zu einem neuen Spannbaum zu verbinden.

Zeigen oder widerlegen Sie: Der Algorithmus berechnet einen minimal spannenden Baum für G.